《論　文》

新古典派最適成長モデル
— オープン・モデルと位相図による接近 —

目　黒　徹　郎*

Neoclacical Optimal Growth Model
—Aproach with Non-Specified Functions and the Phase Diagrams—

TETSUO MEGURO

キーワード
動的最適化（Dynamic Optimization），最適成長（Optimal Growth），新古典派（Neo-classical）

1　はじめに

ここでは，新古典派最適成長モデルを出来るだけ，関数形を特定せずに（それが表題の「オープン・モデル」の意味するところである）解析的手法と位相図によって，展開することを考えてみる。多くの文献では新古典派最適成長モデルは，効用関数および／あるいは生産関数を特定化して，明示的に解を求めることでその分析を進めている。たとえばBarro-Sala-i-Martin［1］なども例外ではない。しかしながら，関数形を特定化することによって，その定性的な性質が他の関数形を仮定した場合にも成立するのか否か，が明らかでない。ここでは，関数形の特定化を極力避けて，そのモデルの特徴を分析することにしたい。

2　モデル

ここでは，無限期間の連続的時間地平をもつ，新古典派経済成長モデルを考える。生産物の価格は１に基準化されており，海外部門ならびに政府は捨象される。

2.1　マクロ生産関数

以下では，$Y(>0)$ を集計された生産物，$K(>0)$ を集計された資本ストック，$L(>0)$ を労働投入量とする。マクロ生産関数は$Y=F(K;L)$ であらわされる。

マクロ生産関数については以下を仮定する。

$$F:\mathbb{R}^2_{++}\longrightarrow\mathbb{R}_{++}\in C^{(2)} \tag{1}$$

$$F_K(K,L)>0,\quad F_L(K,L)>0 \tag{2}$$

$$F_{KK}(K,L)<0 \tag{3}$$

$$F_{LL}(K,L)<0 \tag{4}$$

$$F_{KL}(K,L)=F_{LK}(K,L)>0 \tag{5}$$

$$F(\theta K,\theta L)=\theta F(K,L)\quad\forall\theta>0 \tag{6}$$

これらは，一般的に使われる仮定であろう。特に(1)はFが２階連続微分可能であることおよび(6)式はマクロ生産関数の１次同次性を意味する。この性質を利用し，$k:=\frac{K}{L}$と書くことにすれば，マクロ生産関数は一人あたり資本kのみの関数として書きなおすことができる。

＊　流通経済大学経済学部，e-mail: meguro@rku.ac.jp

$$f(k) := \frac{F(K,L)}{L} = F\left(\frac{K}{L}, 1\right) \tag{7}$$

(1)から(6)の仮定より，次が従う。

$$f'(k) > 0 \quad (\Longleftrightarrow F_K > 0) \tag{8}$$

$$f(k) - kf'(k) > 0 \quad (\Longleftrightarrow F_L > 0) \tag{9}$$

$$f''(k) < 0 \quad (\Longleftrightarrow F_{kk} < 0) \tag{10}$$

また，一人あたりのマクロ生産関数$f(\cdot)$次のような仮定を設ける。

$$f(0) = 0, \quad \lim_{k \to 0} f'(k) = +\infty, \quad \lim_{k \to \infty} f'(k) = 0. \tag{11}$$

後ろの２つの条件は，Inada条件と呼ばれる。

このモデルでは政府および海外部門を捨象する。したがって，マクロ産出量Yは民間消費Cと民間粗投資Iとして支出される。民間粗投資は資本ストックKの増加分を構成する。しかし，資本ストックには，資本減耗があり，それは毎年資本ストックの一定率だとしよう。つまり，

$$I(t) = \dot{K}(t) + \delta K \tag{12}$$

が成り立つということである。ここで$\delta > 0$は資本の減耗率である。また，資本ストックは$t = 0$の時点で，$K(0) = K_0 > 0$が存在するとする。また，労働者数$L(t)$は一定率（$\eta > 0$）で増えるとしよう。

$$L(t) = e^{\eta t} L(0)$$
$$\text{i.e.} \quad \dot{L}(t) = \eta L(t) \quad L(0) > 0 \tag{13}$$

ここで，労働量の初期値$L(0)$は所与とする。

また，$\dot{K}(t)$ の定義により次を得る。

$$\dot{K}(t) = \frac{dk(t)L(t)}{dt}$$
$$= \dot{k}(t)L(t) + k(t)\dot{L}(t)$$
$$= \dot{k}(t)L(t) + k(t)\eta L(t) \tag{14}$$

ここで，$c := \frac{C}{L}$と表記することにすると，$Y = C + I$を労働者一人あたりのタームで表せば，

$$f(k(t)) = \dot{k}(t) - \delta k(t) - c(t) \tag{15}$$

(14)式を，労働者１人あたりのタームに直し，(15)を考慮すると次の式を得る。

$$\dot{k}(t) = f(k(t)) - (\delta + \eta)k(t) - c(t) \tag{16}$$

これは新古典派経済成長モデルにおける一人あたり資本$\dot{k}(t)$の軌道を表す微分方程式である。

2.2　消費者

次に消費者の効用については，以下のような設定をする。消費者はt期に消費する$c(t)$から瞬間的効用を得る。消費者はその瞬間的効用の将来にわたっての割引現在価値の和を最大化することを目的とする。瞬間的効用関数$u(c(t))$については次を仮定する。

$$u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \in C^{(2)} \tag{17}$$

$$u'(c) > 0 \quad \forall c > 0 \tag{18}$$

$$u''(c) < 0 \quad \forall c > 0 \tag{19}$$

$$\lim_{c \to 0} u'(c) = +\infty, \quad \lim_{c \to +\infty} u'(c) = 0 \tag{20}$$

これらは，しばしば特定化される関数形が満たしている条件である。特に(20)式は，一人あたりマクロ生産関数に課したのと同様な条件であり，Inada-like条件と呼んでおこう。

消費者が将来消費がもたらす効用を割り引く割引率は$\rho > 0$の一定値であると仮定する。したがって，消費者が消費量$c(t)$をコントロールすることで最大化したい目的関数は次のように表される。

$$\int_0^{+\infty} u(c(t))L(t)e^{-\rho t}dt \quad \forall t > 0 \tag{21}$$

この目的関数は，(13)を考慮すれば，次のようになる。

$$L(0)\int_0^{+\infty} u(c(t))e^{-(\rho-\eta)t}dt \quad \forall t>0 \tag{22}$$

ここでさらに次のような仮定を置く。

$$\rho > \eta \tag{23}$$

これは，総効用が有限の値に収束するために必要とされる条件である。なお，目的関数の前にある$L(0)>0$という定数は，behaviorには無関係なので，無視して構わない。[*1]

したがって，この最適化問題の定式化は次のようになる。

$$\max_{c(t)} \int_0^{+\infty} u(c(t))e^{-(\rho-\eta)t}dt \tag{24}$$

$$\text{s.t.} \quad \dot{k} = -(\delta+\eta)k(t) - c(t), \tag{25}$$

$$k(0) = K_0, \quad c(t) \geqq 0 \quad \forall t>0 \tag{26}$$

注意すべきことは，制約式の最後の部分は次をも意味するということである。

$$\lim_{t\to+\infty} c(t) \geqq 0 \tag{27}$$

2.3　経常価値 dynamic Lagrangian

この問題を解くためにここで次のような関数を定義する。

$$\begin{aligned}&\mathscr{L}(c(t),k(t),\lambda(t),\mu(t))\\ &\quad := u(c(t)) + \lambda(t)\left(f(k(t)) - c(t)\right.\\ &\quad \left. - (\delta+\eta)k(t)\right) + \mu(t)c(t)\end{aligned} \tag{28}$$

これは経常価値dynamic Lagrangian（current value dynamic Lagrangian）と呼ばれる定式化である。ここで$c(t)$は制御変数（control variable）[*2]，$k(t)$は状態変数（state variable），λ(t) およびμ(t)は随伴状態変数（costate variable）である。

ここから，最適化のための必要条件を求めると次を得る。

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial c(t)}\mathscr{L}(c(t),k(t),\lambda(t),\mu(t))\\ &\quad = u'(c(t)) - \lambda(t) + \mu(t) = 0\end{aligned} \tag{29}$$

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial \mu(t)}\mathscr{L}(c(t),k(t),\lambda(t),\mu(t))\\ &\quad = c(t) \geqq 0\end{aligned} \tag{30}$$

$$\mu(t) \geqq 0 \tag{31}$$

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial \mu(t)}\mathscr{L}(c(t),k(t),\lambda(t),\mu(t))\cdot\mu(t)\\ &\quad = c(t)\mu(t) = 0\end{aligned} \tag{32}$$

$$\begin{aligned}\dot{\lambda}(t) &= (\rho-\eta)\lambda(t) - \frac{\partial}{\partial k(t)}\mathscr{L}(c(t),k(t),\\ &\quad k(t),\lambda(t),\mu(t))\\ &= \lambda(t)\left(\delta+\eta+(\rho-\eta) - f'(k(t))\right)\end{aligned} \tag{33}$$

$$\begin{aligned}\dot{k}(t) &= \frac{\partial}{\partial \lambda(t)}\mathscr{L}(c(t),k(t),\lambda(t),\mu(t))\\ &= f(k(t)) - (\delta+\eta)k(t) - c(t)\end{aligned} \tag{34}$$

$$k(0) = k_0 \equiv \frac{K(0)}{L(0)} \tag{35}$$

これらの中で，(32)は，消費軌道とそれに対するshadow priceの相補スラック性を意味している。しかし，すべてのtに関して$c(t)=0$は経済学的implicationより，除外しても良い。したがって，次が従う。

$$c(t) > 0 \quad \forall t>0 \tag{36}$$

$$\mu(t) = 0 \quad \forall t>0 \tag{37}$$

最適化の十分条件は次のように簡単に確認できる。

＊1　あるいは，$L(0)=1$に正規化されているといっても良い。

＊2　変数というよりも汎関数（functional）を構成する軌道というべきものだが，通常の用語に従う。以下も同様。

$$\frac{\partial^2}{\partial c(t)^2}\mathscr{L}(c(t),k(t),\lambda(t),\mu(t))$$
$$= u''(c(t)) < 0 \tag{38}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial k(t)^2}\mathscr{L}(c(t),k(t),\lambda(t),\mu(t))$$
$$= \lambda(t)f''(k(t)) < 0 \tag{39}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial c(t)^2}\mathscr{L}(c(t),k(t),\lambda(t),\mu(t))$$
$$\frac{\partial^2}{\partial k(t)^2}\mathscr{L}(c(t),k(t),\lambda(t),\mu(t))$$
$$-\left\{\left(\frac{\partial^2}{\partial k(t)c(t)}\right)\right\}^2$$
$$= \lambda(t)f''(k(t))u''(c(t)) > 0 \tag{40}$$

この(38)－(40)の条件で，dynamic Lagrangianは，制御変数 $c(t)$ と状態変数 $k(t)$ に関して，厳密に凹（strictly concave）であることが保証された。

3　定常状態

3.1　定常状態の性質

前項で述べた，必要条件から導かれる解軌道 $k^*(t;\ \delta,\eta,\rho)$；$c^*(t;\ \delta,\eta,\rho)$ はそれぞれ，次のような定常状態（steady state）に帰着する。

$$k^*(t;\delta,\eta,\rho) \longrightarrow k^S(\delta,\eta,\rho) \quad (t\to+\infty) \tag{41}$$

$$c^*(t;\delta,\eta,\rho) \longrightarrow c^S(\delta,\eta,\rho) \quad (t\to+\infty) \tag{42}$$

ここで改めて，経常価値Hamiltonian（current value Hamiltonian）$\mathscr{H}(c(t),\ k(t),\ \lambda(t))$ を次のように定義する。

$$\mathscr{H}(c(t),k(t),\lambda(t))$$
$$:= u(c(t)) + \lambda(t)\left(f(k(t)) - c(t)(\delta-\eta)\right) \tag{43}$$

(36)と(37)により，動学的経常価値Lagrangian (28)と(43)は本質的に同一の式となる。したがって，(29)つまり $\dfrac{\partial}{\partial c(t)}\mathscr{H}(c,\ k,\ \mu) = u'(c) - \lambda = 0$ から，陰関数定理（implicit function theorem）を用いて，λ の関数としての $c=\tilde{c}(\lambda)$ の傾きを求めることができる。

$$\tilde{c}'(\lambda) = -\left.\frac{\frac{\partial^2}{\partial c\partial\lambda}\mathscr{H}}{\frac{\partial^2}{\partial c^2}\mathscr{H}}\right|_{c=\tilde{c}(\lambda)} = \frac{1}{u''(\tilde{c}(\lambda))} < 0 \tag{44}$$

多くの場合，新古典派最適成長論では，$k(t)$ と $c(t)$ の間の動学的関係として分析されることが多い。しかし，変数 $\lambda(t)$ は，一人あたり資本 $k(t)$ のshadow priceであることは，(33)からわかる。また，(44)によって，$c(t)$ と $\lambda(t)$ は１対１の関係にあることも明らかである。この後は，この動的システムを $k(t)$ と $\lambda(t)$ の関係とみなすことにして，議論をすすめることにしよう。これは，効用関数 $u(\cdot)$ の関数形を特定しないために必要とされる工夫である。

(33)および(34)および $\tilde{c}(\lambda(t))$ の定義より次を得る。

$$\dot{k}(t) = f(k(t)) - (\delta+\eta)k(t) - \tilde{c}(\lambda) \tag{45}$$

$$\dot{\lambda}(t) = \lambda(t)\left(\delta+\eta+(\rho-\eta) - f'(k(t))\right) \tag{46}$$

この２式で表される λ と k のdynamical systemが，これ以降の分析の主眼になる。

上のdynamical systemの解は，(41)と(42)に対応している。ここで，(42)の逆関数を次のように定義する。

$$c = c^s(\delta,\eta,\rho) \Longleftrightarrow \lambda = \lambda^s(\delta,\eta,\rho) \tag{47}$$

その上で，$k^s(\delta,\eta,\rho)$ と $\lambda^s(\delta,\eta,\rho)$ をdynamical system (45)と(46)に代入すると，$\dot{\lambda}=0$ と $\dot{k}=0$ を得る。

$$f(k(t)) - (\delta+\eta)k(t) - \tilde{c}(\lambda) = 0 \tag{48}$$

$$\lambda(t)\left(\delta+\eta+(\rho-\eta) - f'(k(t)\right) = 0 \tag{49}$$

上の２式を同時に満たすのが，定常状態 $k^s(\delta,\eta,\rho)$ と $\lambda^s(\delta,\eta,\rho)$ である。その安定性を

判定するために，上２式を定常状態周りで線形近似をする。そのために，定常状態周りのヤコビアン（Jacobian）行列 $\boldsymbol{J}(k^s(\delta,\eta,\rho),\lambda^s(\delta,\eta,\rho))$ をもとめると

$$\boldsymbol{J}(k^s(\delta.\eta,\rho),\lambda^s(\delta,\eta,\rho))$$

$$:= \left.\begin{pmatrix} \frac{\partial \dot{k}(t)}{\partial k(t)} & \frac{\partial \dot{k}(t)}{\partial \lambda(t)} \\ \frac{\partial \dot{\lambda}(t)}{\partial k(t)} & \frac{\partial \dot{\lambda}(t)}{\partial \lambda(t)} \end{pmatrix}\right|_{\dot{k}(t)=0,\dot{\lambda}(t)=0}$$

$$= \left.\begin{pmatrix} f'(k(t))-(\delta+\eta) & -\tilde{c}'(\lambda(t)) \\ -\lambda(t)f''(k(t)) & \delta+\eta+\rho-\eta-f'(k(t)) \end{pmatrix}\right|_{\dot{k}(t)=0,\dot{\lambda}(t)=0}$$

$$= \begin{pmatrix} \rho-\eta & -\tilde{c}'(\lambda^s(\delta,\eta,\eta)) \\ -\lambda^s(\delta,\rho,\eta)f''(k^s(\delta,\rho,\eta)) & 0 \end{pmatrix} \tag{50}$$

となる。

ヤコビアンのトレースと行列式を求めると以下を得る。

$$\mathrm{tr}\boldsymbol{J}(k^s(\delta.\eta,\rho),\lambda^s(\delta,\eta,\rho)) = \rho-\eta>0 \tag{51}$$

$$\det\boldsymbol{J}(k^s(\delta.\eta,\rho),\lambda^s(\delta,\eta,\rho)) = -\lambda^s(\delta,\rho,\eta)\tilde{c}'(\lambda^s(\delta,\eta,\eta))f''(k^s(\delta,\rho,\eta))<0 \tag{52}$$

実正方行列において，その行列式の値は当該行列の固有値（eigen value）の積に等しいことはよく知られている。上に述べたヤコビアン行列 $\boldsymbol{J}(k^s(\delta,\eta,\rho),\ \lambda^s(\delta,\eta,\rho))$ は 2×2 であり，かつその行列式は負である。さらに，同行列は非負行列であることは，計算結果から明らかである，したがって，同行列の固有値は実数の２つの値を持ち，それらは一方が正の値で，他方は負の値をもつ。したがって，我々の関心の的である定常状態は，鞍点（saddle point）であることがわかる。以下では，鞍点としての定常状態に関心を集中することにしたい。

3.2　鞍点と位相図

鞍点定常状態の性質を位相図によって，分析することを考える。それらは，$\dot{\lambda}(t)=0$ と $\dot{k}(t)=0$ というisoclineによって構成される。[*3]まず，２つのisoclineの交点が，定常状態を表す $\lambda(t)$ と $k(t)$ の値である，$\lambda^s(\delta,\eta,\rho)$ と $k^s(\delta,\eta,\rho)$ であることを確認しよう。

まずは，$\dot{\lambda}(t)=0$ についてである。同式は

$$\lambda(t)\,(\delta+\eta+\rho-\eta-f'(k(t)))=0 \tag{53}$$

を意味することが(49)より，明らかである。この式には $\lambda(t)$ が現れていない。つまり，$\lambda(t)$ の値とは独立であるということを意味する。これは，$\dot{\lambda}(t)=0$ を表すisoclineは，$\lambda-k$ 平面において，垂直であるということを意味する。さらに，$\dot{\lambda}(t)=0$ の左右での点の動きは，(50)の値より

$$\left.\frac{\partial \dot{\lambda}(t)}{\partial k(t)}\right|_{\dot{k}(t)=0,\dot{\lambda}(t)=0} > 0 \tag{54}$$

を得る。したがって，ベクトル場は図１のように描くことが出来る。

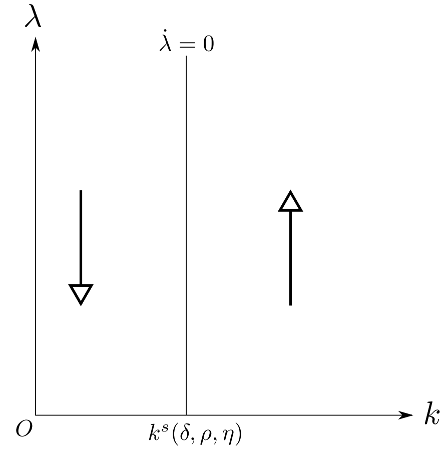

図１　$\dot{\lambda}=0$ のisoclineとベクトル場

＊３　isoclineについては，適当な訳語がみつからないため，そのまま使うことにする。

一方，$\dot{k}(t)=0$ のisoclineの形状は，やや複雑な手続きを必要とする。いま，(45)から，陰関数 $\hat{\lambda}(k)$ を次のように定義する。

$$\hat{\lambda}(k)=\arg\{f(k)-(\delta+\eta)k-\tilde{c}(\lambda)=0\} \tag{55}$$

この式と $\tilde{c}(\lambda)$ の定義より，$\hat{\lambda}(k)$ の傾きを陰関数定理によって求める。まず $\dot{k}(t)=0$ の時には

$$f(k)-(\delta+\eta)k-\tilde{c}(\lambda)=0 \tag{56}$$

が成立することに注意する。ここから，$\tilde{c}(\lambda)$ および $\hat{\lambda}(k)$ の定義により

$$\frac{d\hat{\lambda}(k)}{dk}=\frac{f'(k)-(\delta+\eta)}{\tilde{c}'(\lambda)}<0 \tag{57}$$

を得る。したがって，$\dot{k}(t)=0$ のisoclineは $\lambda-k$ 平面において右下がりであることがわかる。さらにベクトル場の方向を確定するために，$\tilde{c}(\lambda)$ の定義より次を得る。

$$\left.\frac{\partial\dot{k}(t)}{\partial\lambda(t)}\right|_{\dot{k}(t)=0,\dot{\lambda}(t)=0}$$
$$=-\tilde{c}'(\lambda^s(\delta,\eta,\rho))|_{\dot{k}(t)=0,\dot{\lambda}(t)=0}>0 \tag{58}$$

$$\left.\frac{\partial\dot{k}(t)}{\partial k(t)}\right|_{\dot{k}(t)=0,\dot{\lambda}(t)=0}$$
$$=f(k(t))-(\delta+\eta)|_{\dot{k}(t)=0,\dot{\lambda}(t)=0}$$
$$=\rho-\eta>0 \tag{59}$$

ここから，図2を得る。

結果として，定常状態の近傍でのベクトル場は図3のようになる。また，鞍点への安定パスは図4の太い矢印で表されるようなものだけであり，その他の初期条件は同図の点線で示したように，定常状態に至らないことが見て取れる。定常状態に至らないパスがisoclineを超えて他の領域に至るときそれぞれ，水平・垂直な傾きを持つことに注意が必要である。

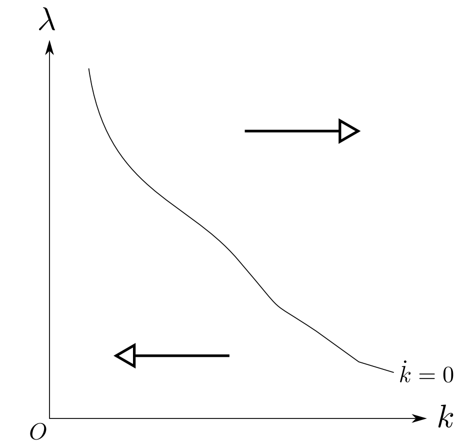

図2　$\dot{k}=0$ のisoclineとベクトル場

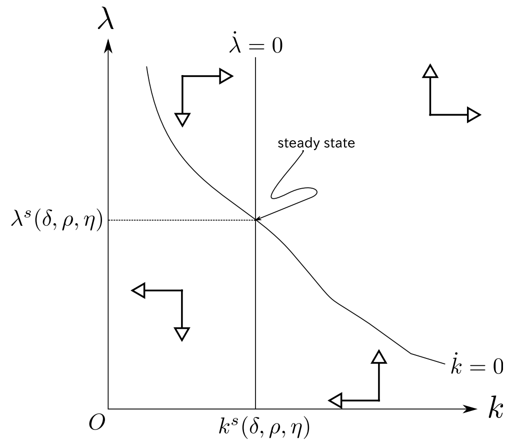

図3　steady stateとベクトル場

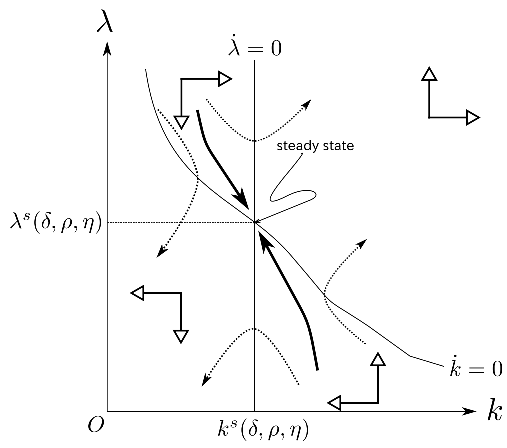

図4　鞍点とベクトル場

4　比較動学

4.1　$\lambda^s(\delta,\eta,\rho)$ および $k^s(\delta,\eta,\rho)$ への影響

ここでは，定数としたパラメーターの変化で，定常状態がどのように変化するのかを可能な限り分析することにする。定常状態は $\lambda^s(\delta,\eta,\rho)$ と $k^s(\delta,\eta,\rho)$ で表される。この値が，パラメーター δ,η,ρ の変化によって，それぞれどう変化するかを確定できる範囲で探ることにする。

定常状態の定義により，つぎの関係は恒等的に成立する。

$$f(k^s(\delta,\eta,\rho))-(\delta+\eta)k^s(\delta,\eta,\rho) - \tilde{c}(\lambda^s(\delta,\eta,\rho))=0 \tag{60}$$

$$\lambda^s(\delta,\eta,\rho)\{(\delta+\eta+\rho-\eta) - f'(k^s(\delta,\eta,\rho))\}=0 \tag{61}$$

この両式を δ で微分すると次を得る。

$$\left.\begin{pmatrix} f'(k(t))-(\delta+\eta) & -\tilde{c}'(\lambda(t)) \\ -\lambda(t)f''(k(t)) & \delta+\eta+\rho-\eta-f'(k(t)) \end{pmatrix}\right|_{\dot{k}(t)=0,\dot{\lambda}(t)=0} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial\delta}k^s(\delta,\eta,\rho) \\ \frac{\partial}{\partial\delta}\lambda^s(\delta,\eta,\rho) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k^s(\delta,\eta,\rho) \\ \lambda^s(\delta,\eta,\rho) \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} \rho-\eta & -\tilde{c}'(\lambda^s(\delta,\eta,\eta)) \\ -\lambda^s(\delta,\rho,\eta)f''(k^s(\delta,\rho,\eta)) & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial\delta}k^s(\delta,\eta,\rho) \\ \frac{\partial}{\partial\delta}\lambda^s(\delta,\eta,\rho) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k^s(\delta,\eta,\rho) \\ \lambda^s(\delta,\eta,\rho) \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \boldsymbol{J}\,(k^s(\delta.\eta,\rho),\lambda^s(\delta,\eta,\rho)) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial\delta}k^s(\delta,\eta,\rho) \\ \frac{\partial}{\partial\delta}\lambda^s(\delta,\eta,\rho) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k^s(\delta,\eta,\rho) \\ \lambda^s(\delta,\eta,\rho) \end{pmatrix} \tag{62}$$

ここからCramerの公式を使って，パラメータ δ が定常状態にもたらす影響を評価する。

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial\delta}k^s(\delta,\eta,\rho) \\ &= \begin{vmatrix} k^s(\delta,\eta,\rho) & -\tilde{c}'(\lambda(t)) \\ \lambda^s(\delta,\eta,\rho) & 0 \end{vmatrix} \Big/ \det\boldsymbol{J} \\ &= (\tilde{c}'(\lambda(t)))\,\lambda^s(\delta,\eta,\rho)/\det\boldsymbol{J} > 0 \end{aligned} \tag{63}$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial\delta}\lambda^s(\delta,\eta,\rho) \\ &= \begin{vmatrix} \rho-\eta & k^s(\delta,\eta,\rho) \\ -\lambda^s(\delta,\rho,\eta)f''(k^s(\delta,\rho,\eta)) & \lambda^s(\delta,\eta,\rho) \end{vmatrix} \Big/ \det\boldsymbol{J} \end{aligned} \tag{64}$$

$$\begin{aligned} &= (\rho-\eta)\lambda^s(\delta,\eta,\rho)+ \\ &k^s(\delta,\eta,\rho)\lambda^s(\delta,\rho,\eta)f''(k^s(\delta,\rho,\eta))/\det\boldsymbol{J} \\ &\to (\text{符号不定}) \end{aligned} \tag{65}$$

同様にして(60)と(61)を η について微分すると次を得る。

$$\boldsymbol{J}\cdot\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial\eta}k^s(\delta,\eta,\rho) \\ \frac{\partial}{\partial\eta}\lambda^s(\delta,\eta,\rho) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k^s(\delta,\eta,\rho) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{66}$$

これを用いて，η が定常状態に与える影響を評価する。

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial\eta}k^s(\delta,\eta,\rho) = \\ &\begin{vmatrix} k^s(\delta,\eta,\rho) & -\tilde{c}'(\lambda^s(\delta,\eta,\rho)) \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \Big/ \det\boldsymbol{J} = 0 \end{aligned} \tag{67}$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial\eta}\lambda^s(\delta,\eta,\rho) \\ &= \begin{vmatrix} \rho-\eta & k^s(\delta,\eta,\rho) \\ -\lambda^s(\delta,\eta,\rho))f''(k^s(\delta,\eta,\rho))) & 0 \end{vmatrix} \Big/ \det\boldsymbol{J} \\ &= \frac{-k^s(\delta,\eta,\rho)\lambda^s(\delta,\eta,\rho)f''(k^s(\delta,\eta,\rho))}{\det\boldsymbol{J}} < 0 \end{aligned} \tag{68}$$

同様な手続きで，パラメーター ρ が定常状態に及ぼす影響を見ることが出来る。(60)と(61)により，次を得る。

$$\boldsymbol{J}\cdot\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial\rho}k^s(\delta,\eta,\rho)\\ \frac{\partial}{\partial\rho}\lambda^s(\delta,\eta,\rho)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ -\lambda^s(\delta,\eta,\rho)\end{pmatrix} \tag{69}$$

これらから，次を導出できる。

$$\frac{\partial}{\partial\rho}k^s(\delta,\eta,\rho)=$$

$$\left.\begin{vmatrix}0 & -\tilde{c}'(\lambda^s(\delta,\eta,\rho))\\ -\lambda^s(\delta,\eta,\rho) & 0\end{vmatrix}\middle/\det\boldsymbol{J}\right.$$

$$=\frac{-\lambda^s(\delta,\eta,\rho)\tilde{c}'(\lambda^s(\delta,\eta,\rho))}{\det\boldsymbol{J}}<0 \tag{70}$$

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\lambda^s(\delta,\eta,\rho)=$$

$$\left.\begin{vmatrix}\rho-\eta & 0\\ -\lambda^s(\delta,\eta,\rho)f''(k^s(\delta,\eta,\rho)) & -\lambda^s(\delta,\eta,\rho)\end{vmatrix}\middle/\det\boldsymbol{J}\right.$$

$$=\frac{-\lambda^s(\delta,\eta,\rho)(\rho-\eta)}{\det\boldsymbol{J}}>0 \tag{71}$$

4.2　$c^s(\delta,\eta,\rho)$への影響

定常状態に対応する消費水準 $c^s(\delta,\eta,\rho)$は，モデルでは影に隠れてしまっているが，パラメーター η,ρ の変化については，次のようにして知ることが出来る。

(44)と上の比較動学の結果より次を得る。

$$\frac{\partial}{\partial\eta}c^s(\delta,\eta,\rho)$$

$$=\tilde{c}'(\lambda^s(\delta,\eta,\rho))\frac{\partial}{\partial\eta}\lambda^s(\delta,\eta,\rho)>0 \tag{72}$$

$$\frac{\partial}{\partial\rho}c^s(\delta,\eta,\rho)$$

$$=\tilde{c}'(\lambda^s(\delta,\eta,\rho))\frac{\partial}{\partial\rho}\lambda^s(\delta,\eta,\rho)<0 \tag{73}$$

5　結びにかえて

本稿では，やや分析対象よりも手法に関心を払い過ぎたきらいがある。しかしながら，このように，陰関数定理と包絡線定理をもちいて，なおかつ直接的な操作変数（ここでは $c(t)$）のかわりに，shadow price を前面に出すことで，効用関数および生産関数というモデルの根幹をなす関数の特定化を避けても分析が可能であるということは興味深い。

この手法が，技術革新やstochastic な条件を考慮に入れたモデルでも有効であるかは，まだわからないところであるが，吟味して見る価値はあるだろう。残された課題は多い。それらについては，他日を期したい。

参考文献

[1] Barro, Robert J and Sala-i-Martin, Xavier. *Economic Growth Second Edition*, The MIT Press Cam-bridge, Massachusetts, USA and London, England, 2004.

[2] Blanchard, Oliver J. and Stanley Fischer, *Lectures on Macroeconomics*, The MIT Press Cambridge, Massachusetts, USA, 1989.

[3] Cass, D. "Optimal Growth in an Aggregate Model of Capital Accumulation," *Review of Economic Studies*, 32, 233-240, 1965.

[4] Caputo, Michael R., *Foundations of Dynamic Economic Analysis —Optimal Control Theory and Applications—*, Cambridge University Press, United Kingdom, 2005.

[5] Koopmans, T. "On the Concept of Optimal Economic Growth," in *Ponitificiae Academic Scientiarum Scripta Baria*, No. 28, Amsterdam, North-Holland, 1965.

[6] Romer, David, *Advanced Macroeconomics Fourth Edition*, McGraw-Hill Irwin, USA, 2012.

[7] 大住圭介,『経済成長分析の方法—イノベーションと人的資本のマクロ動学分析—』, 九州大学出版会，福岡，2003.

[8] 大住圭介・川端公久・筒井修二編,『経済成長と動学』, 勁草書房，東京，2006.

[9] 西村和雄・矢野誠,『マクロ経済動学』, 岩波書店，東京，2007.